Chapitre 1 : Description et paramétrage du mouvement d'un point

Il s'agit dans ce chapitre de décrire le mouvement d'un point sans chercher à en déterminer la cause : c'est l'objet de la cinématique du point, partie de la mécanique qui étudie l'évolution de la position du point au cours du temps.

1. Observateur et référentiel d'étude

Si la cinématique consiste à décrire l'évolution de la position d'un point dans l'espace, il est nécessaire de préciser par rapport à qui (ou quoi). En effet, le mouvement d'un système peut être perçu différemment pour deux observateurs distincts.
exemple : un autostoppeur sur le bord de la route verra un panneau immobile tandis que le passager d'une voiture le verra en mouvement (venant vers lui).

Afin de décrire le mouvement du système, l'observateur a besoin :

- d'un repère c'est-à-dire un système d'axes fixes attaché à un point immobile pour l'observateur (le nombre d'axes retenus dépendra du problème étudié et pourra ainsi varier de un à trois)
- d'une horloge afin de définir une échelle temporelle

On définit ainsi ce que nous appellerons par la suite un référentiel d'étude.

Un repère sera généralement écrit $\left(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ avec :

- O est appelé origine (point fixe pour l'observateur)
- $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ est un trièdre (on parle également de base) le plus souvent direct et orthonormé c'est-à-dire pour lequel on a :

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \\ \left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\| = \left\|\vec{w}\right\| = 1 \end{cases}$$

En mécanique classique (Newtonienne), l'échelle des temps sera la même pour tous les référentiels (si on a synchronisé les horloges, autrement dit qu'on a le même instant initial). On parle de temps absolu. En mécanique relativiste, ce n'est plus le cas et l'échelle des temps dépend du référentiel d'étude.

En cinématique, la description complète du mouvement d'un point M dans le référentiel d'étude R consiste en la donnée pour tout instant t de trois vecteurs :

- le vecteur position $\overrightarrow{OM}$
- le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$
- le vecteur accélération $\overrightarrow{a_M} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

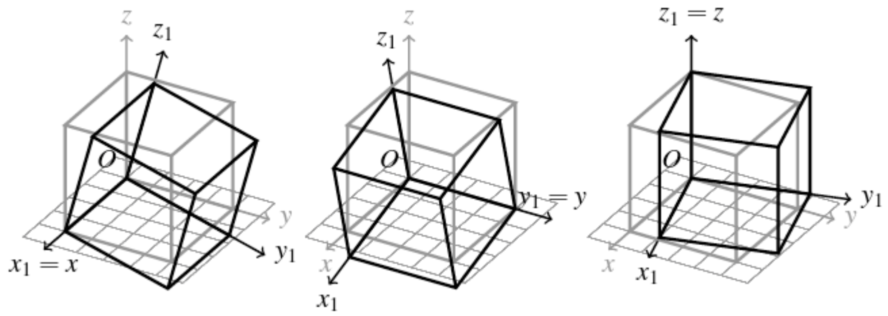
2. Notion de point

2.1. Définition d'un solide

Un système matériel est appelé solide si les points qui le constituent sont à distance constante les uns des autres. Un solide est donc un système matériel indéformable (pour la cinématique). Son repérage dans l'espace s'effectue à l'aide de six paramètres :

- les trois coordonnées d'un point du solide (le plus souvent son centre de gravité G)
- trois angles définissant l'orientation des trois axes d'un repère lié au solide par rapport au référentiel d'étude.

exemple : un cube en bois est un solide. On peut prendre pour repère lié au solide celui formé par (Ax_1), (Ay_1), (Az_1) défini par trois arêtes du cube issu d'un même sommet A.



2.2. Définition d'un point

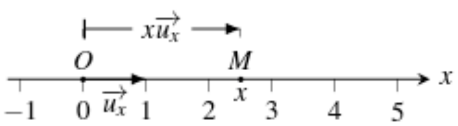
> Un système matériel est dit ponctuel si son extension spatiale est négligeable ou n'influe pas sur son mouvement. Dans ce cas, son repérage dans l'espace s'effectue à l'aide de ses trois coordonnées.

D'une manière générale, nous verrons que, suivant les cas et/ou le degré d'approximation désiré, nous pourrons assimiler certains solides à des points.

3. Cas d'un problème unidimensionnel ou bidimensionnel

3.1. Cas unidimensionnel

C'est le cas lorsque le système ponctuel se déplace sur un axe.
exemple : chute libre d'une bille lâchée sans vitesse initiale, oscillation d'une masse accrochée au bout d'une ressort



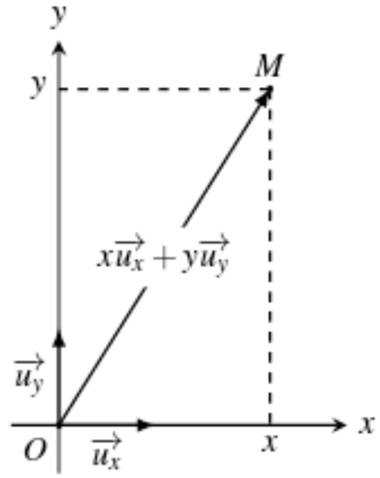
> Si on note $(O,\overrightarrow{u_x})$ l'axe sur lequel se déplace le point M étudié, on aura :
>
> - vecteur position $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{u_x}$
> - vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}(t)\overrightarrow{u_x}$
> - vecteur accélération : $\overrightarrow{a_M}(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}(t)\overrightarrow{u_x}$

3.2. Cas bidimensionnel

C'est le cas lorsque le système se déplace dans un plan.
exemple : oscillation de l'extrémité d'un pendule, tir d'un projectile (boulet de canon)

On peut alors utiliser :

✓ les coordonnées cartésiennes : pour un point O et une base orthonormée $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ du plan dans lequel se déplace le point M, on aura :

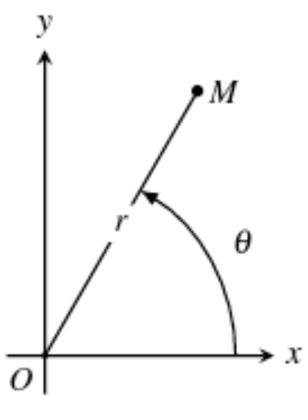


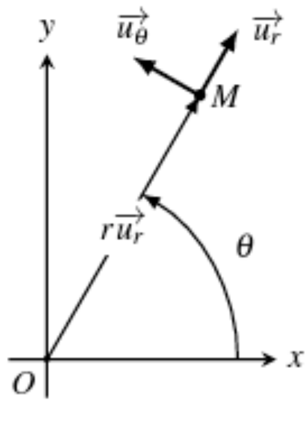
- vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y}$
- vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y}$
- vecteur accélération : $\overrightarrow{a_M} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y}$

On peut également noté les vecteurs sous forme de vecteur « colonne ». On a alors :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \; ; \; \overrightarrow{v_M} = \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{vmatrix} \; ; \; \overrightarrow{a_M} = \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{vmatrix}$$

✓ les coordonnées polaires : pour un même point O, on considère une base orthonormée mobile $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ du plan dans lequel se déplace le point M.





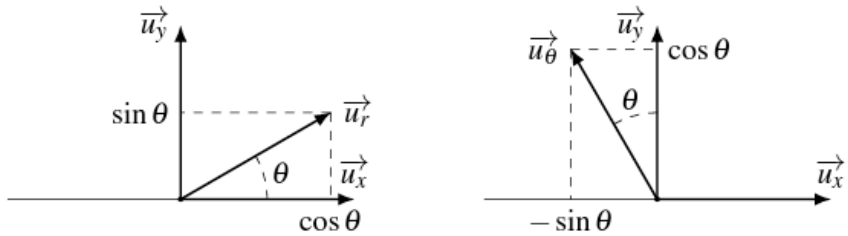
On définit ainsi deux nouvelles coordonnées (r,θ), toutes deux fonctions du temps, telles que :

- $r=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$: r est la distance entre l'origine O et le point M
- $\theta=\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{u_x}\right)$: θ est l'angle effectué par (OM) par rapport à l'axe des abscisses des coordonnées cartésiennes.

Contrairement aux coordonnées cartésiennes pour lesquels $\left(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y}\right)$ sont fixes et indépendants de t, $\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\right)$ varient ce qui implique que leurs dérivées ne sont pas nulles.

Exercice : Établir à l'aide de la base cartésienne $\left(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y}\right)$ les expressions des vecteurs $\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta}\right)$, vérifier qu'ils constituent bien une base orthonormée et donner l'expression de leurs dérivées.

Corrigé :



on a

$$\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=\cos(\theta)\overrightarrow{u_x}+\sin(\theta)\overrightarrow{u_y}\\ \overrightarrow{u_\theta}=-\sin(\theta)\overrightarrow{u_x}+\cos(\theta)\overrightarrow{u_y}\end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases}\left\|\overrightarrow{u_r}\right\|^2=\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_r}=\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1\\ \left\|\overrightarrow{u_\theta}\right\|^2=\overrightarrow{u_\theta}.\overrightarrow{u_\theta}=\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1\\ \overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_\theta}=-\sin(\theta)\cos(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)=0\end{cases}$$

Enfin :

$$\begin{cases}\dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}=-\sin(\theta)\dot{\theta}\overrightarrow{u_x}+\cos(\theta)\dot{\theta}\overrightarrow{u_y}=\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\\ \dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}=-\cos(\theta)\dot{\theta}\overrightarrow{u_x}-\sin(\theta)\dot{\theta}\overrightarrow{u_y}=-\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}\end{cases}$$

On obtient ainsi en coordonnés polaires :

- vecteur position $\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{u_r}$
- vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\dot{r}\overrightarrow{u_r}+r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$
- vecteur accélération : $\overrightarrow{a_M}=\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r}+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$

Sous forme de vecteur « colonne », on a alors :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \end{vmatrix} \; ; \; \overrightarrow{v_M} = \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{vmatrix} \; ; \; \overrightarrow{a_M} = \begin{vmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Le choix de l'un ou l'autre des deux systèmes de coordonnées dépendra du mouvement du point M (ces coordonnées sont par exemple bien adaptées aux mouvements circulaires).

Exercice : exprimer en coordonnées polaires les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point M animé d'un mouvement circulaire et uniforme de rayon R, de centre O à la vitesse angulaire ω.

Corrigé : on a $r = R = Cte$ et $\dot{\theta} = \omega = Cte$
Ainsi, nous obtenons

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{v_M} = R\omega\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{a_M} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r}$$

On parle de vitesse tangentielle (dirigée à tout instant suivant $\overrightarrow{u_\theta}$) et d'accélération normale centripète (dirigée à tout instant suivant $-\overrightarrow{u_r}$ soit vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire).

On remarque que l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{a_M} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r} = -\frac{{v_M}^2}{R}\overrightarrow{u_r}$$

Exercice : exprimer en coordonnées polaires les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point M animé d'un mouvement circulaire et non-uniforme de rayon R, de centre O à la vitesse angulaire $\omega(t)$.

Corrigé : on a $r = R = Cte$ et $\dot{\theta} = \omega(t)$
Ainsi, nous obtenons

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{v_M} = R\omega\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{a_M} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r} + R\dot{\omega}\overrightarrow{u_\theta}$$

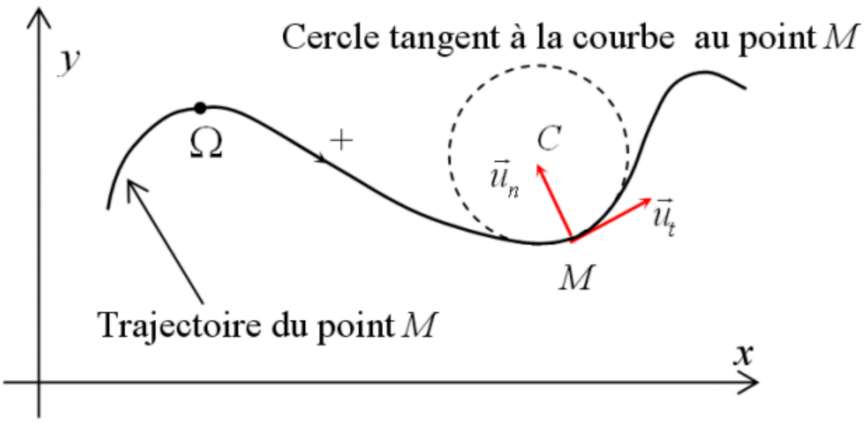
La vitesse reste tangentielle mais l'accélération n'est plus centripète et possède une composante tangentielle et une composante normale centripète.

On remarque que l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{a_M} = -R\omega^2\overrightarrow{u_r} + R\dot{\omega}\overrightarrow{u_\theta} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_\theta} - \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}$$

3.3. Cas d'une trajectoire connue - Base de Frénet

Lorsque la trajectoire que suit le point M est connue, il est possible de repérer le point sur la courbe représentant cette trajectoire. On choisit sur la courbe orientée un point origine Ω et on définit l'abscisse curviligne s comme la mesure algébrique sur la courbe de la distance ΩM .



Le cercle de centre C et de rayon ρ qui tangente localement en M la trajectoire du point est appelé cercle osculateur. Le rayon ρ de ce cercle correspond alors au rayon de courbure de la trajectoire au point considéré et C est le centre de courbure.

En chaque point de la courbe, on définit la base de Frénet $\left(\overrightarrow{u_T}\,;\overrightarrow{u_N}\right)$ aussi notée $\left(\vec{T}\,;\vec{N}\right)$ telle que :

- $\overrightarrow{u_T}$: vecteur unitaire tangent à la courbe en M orienté dans le sens positif
- $\overrightarrow{u_N}$: vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{u_T}$ et orienté vers le centre de courbure.

Cette base est mobile dans le repère.

Il n'existe pas de vecteur position dans la base de Frénet puisque la trajectoire est connue et que M est défini par l'abscisse $s(t)$.

On a alors pour expression de la vitesse et de l'accélération :

- $\overrightarrow{v_M} = \dfrac{ds}{dt}\overrightarrow{u_T}$
- $\overrightarrow{a_M} = \dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} + \dfrac{v^2}{\rho}\overrightarrow{u_N}$

La vitesse ne comporte qu'une seule composante tangentielle et donc pas de composante normale puisque le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire

L'accélération comporte quant à elle deux composantes :

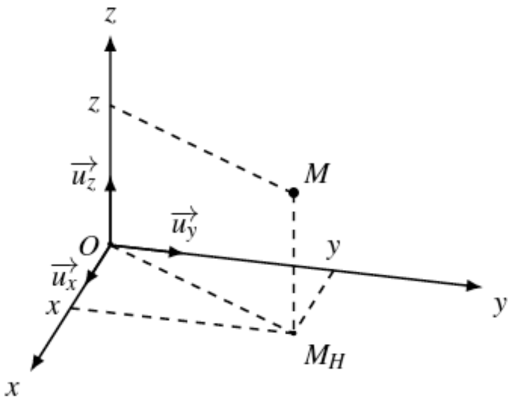
- Une composante tangentielle qui caractérise les variations temporelles de la norme du vecteur vitesse le long de la trajectoire
- Une composante normale qui caractérise les variations temporelles de la direction du vecteur vitesse

Remarque : dans le cas d'un mouvement circulaire pour lequel la trajectoire est un cercle, le centre de courbure est confondu à tout instant avec le centre du cercle, et le rayon de courbure avec le rayon du cercle. On remarque alors que les vecteurs de la base de Frenet s'identifient à ceux de la base polaire introduite précédemment.

Cas d'un problème tridimensionnel

4.1. Coordonnées cartésiennes

Pour un point O de l'espace et une base orthonormée $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right)$, on aura :



Soit

- vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$
- vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$
- vecteur accélération : $\overrightarrow{a_M} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$

Sous forme de vecteurs « colonne », on a alors :

$$\overrightarrow{OM} = \left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right. ; \ \overrightarrow{v_M} = \left|\begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array}\right. ; \ \overrightarrow{a_M} = \left|\begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array}\right.$$

Exercice : on considère un point M animé d'un mouvement à accélération constante. On prend l'exemple d'un tir de projectile soumis à la seule attraction terrestre ; on a alors :

$$\overrightarrow{a_M} = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -g \end{array}\right.$$

L'axe (Oz) étant défini comme l'axe vertical, on choisit les axes (Ox) et (Oy) de telle manière que l'on ait pour vecteur vitesse initial :

$$\overrightarrow{v_M}(t=0) = \overrightarrow{v_0} = \left|\begin{array}{l} v_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ v_0 \sin(\alpha) \end{array}\right.$$

Enfin, l'origine O est définie comme confondue avec le pas de tir.

Montrer que l'on a un mouvement plan et préciser l'allure de la trajectoire du projectile.

Corrigé : par intégration et utilisation des conditions initiales, nous pouvons écrire

$$\overrightarrow{a_M} = \frac{d\overrightarrow{v_M}}{dt} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix}$$

donc

$$\overrightarrow{v_M}(t) = \begin{vmatrix} A \\ B \\ -gt + C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_0\cos(\alpha) \\ 0 \\ -gt + v_0\sin(\alpha) \end{vmatrix} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Soit

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{vmatrix} v_0\cos(\alpha)t + A' \\ B' \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t + C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_0\cos(\alpha)t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

On obtient alors les équations horaires liées au mouvement du point M. Afin d'obtenir l'équation de la trajectoire, il est nécessaire d'éliminer le temps. On a :

$$t = \frac{x}{v_0\cos(\alpha)}$$

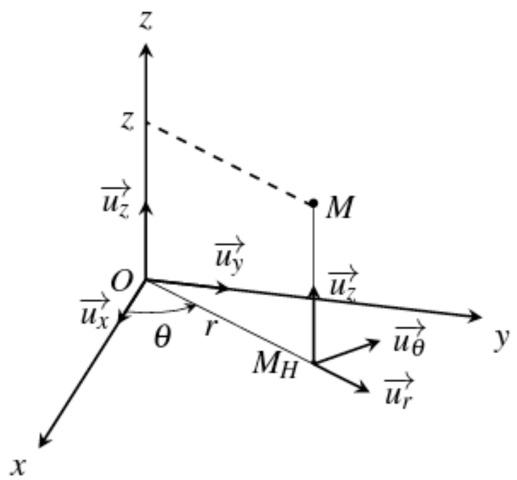
Soit :

$$z = -\frac{1}{2}\frac{g}{\left(v_0\cos(\alpha)\right)^2}x^2 + \tan(\alpha)x$$

La trajectoire du projectile est donc une parabole.

4.2. Coordonnées cylindro-polaires ou cylindriques

Le système de coordonnées cylindriques est obtenu en combinant un axe (Oz) et les coordonnées polaires dans le plan orthogonal à cet axe et contenant O. On définit ainsi une base orthonormée $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ étant mobiles et $\overrightarrow{u_z}$ fixe.



Comme on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_H} + \overrightarrow{M_H M} = \overrightarrow{OM_H} + z\overrightarrow{u_z}$$

le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques s'effectue en changeant le repérage du point M_H dans le plan (xOy).

En reprenant les résultats du paragraphe précédent, nous obtenons donc

- vecteur position $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_H} + \overrightarrow{M_H M} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$
- vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{OM_H}}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{M_H M}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$
- vecteur accélération : $\overrightarrow{a_M} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM_H}}{dt^2} + \dfrac{d^2\overrightarrow{M_H M}}{dt^2} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$

Sous forme de vecteur « colonne », on a alors :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \; ; \; \overrightarrow{v_M} = \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \; ; \; \overrightarrow{a_M} = \begin{vmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{vmatrix}$$

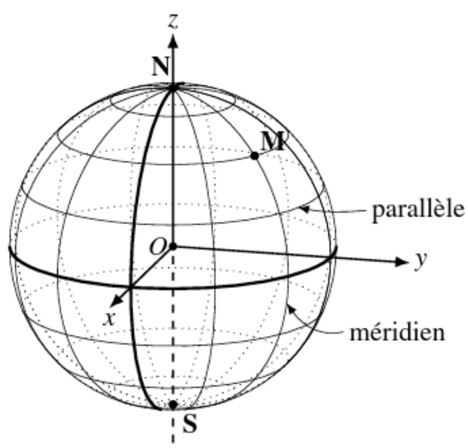
4.3. Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques sont construites en considérant :

- la distance $r = OM$ du point M par rapport à l'origine du repère O
- la position du point M sur la sphère de rayon r à l'aide de deux angles (θ,φ)

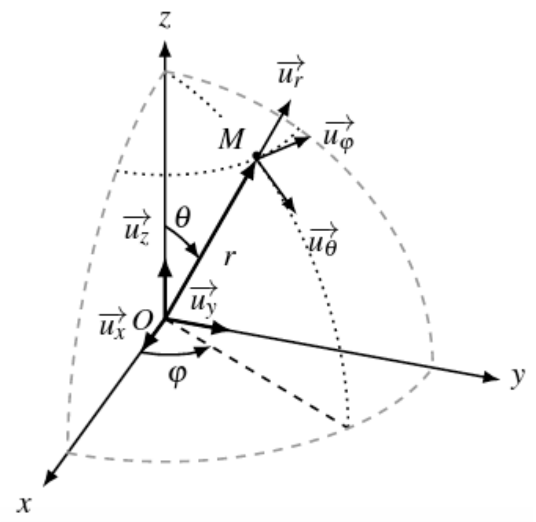
On peut remarquer l'analogie avec la localisation d'un point à la surface de la Terre. Ce dernier se situe à l'intersection d'un méridien et d'un parallèle auxquels on associe deux angles :

- la latitude pour le parallèle (l'origine étant prise à l'équateur)
- la longitude pour le méridien (l'origine étant prise au méridien de Greenwich)



Dans le cas des coordonnées sphériques, les choix effectués diffèrent légèrement :

- φ correspond à la longitude, le méridien d'origine correspondant à l'intersection de la sphère avec le plan (xOz) ; on a ainsi $\varphi \in [0,2\pi[$
- θ est la co-latitude (angle entre l'axe des pôles et le plan du parallèle) ; on a donc $\theta \in [0,\pi]$



On définit ainsi la base mobile $\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}\right)$.

Nous obtenons donc

- vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$
- vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$

Sous forme de vecteur « colonne », on a alors :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \; ; \; \overrightarrow{v_M} = \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r\sin(\theta)\dot{\varphi} \end{vmatrix}$$